EXM IK[X]

$\boxed{3/1}$

a, b, c racines de $X^3 + pX + q$

$$\begin{cases} a+b+c = -0 \\ ab+ac+bc = +p \quad (*) \\ abc = \boxed{-q} \end{cases}$$

d'après le théorème coef-racines

$$P'(a)P'(b)P'(c) = (3a^2+p)(3b^2+p)(3c^2+p)$$

$$= 27\underbrace{a^2b^2c^2}_{(-q)^2} + 9p\left(\underbrace{a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2}\right) + 3p^2\left(\underbrace{a^2+b^2+c^2}\right) + p^3$$

$a+b+c = 0$ donc $\begin{cases} a = -b-c \\ b = -a-c \\ c = -a-b \end{cases}$

donc $b(-b-c) + (-a-c)c + (-a-b)a = p$

d'après $(*)$

ie $-(a^2+b^2+c^2) - (\underbrace{ab+ac+bc}_{p}) = p$

ie $a^2+b^2+c^2 = \boxed{-2p}$

$$ab+bc+ac = p$$

ie $(ab+bc+ac)^2 = p^2$

ie $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2(a^2bc+ab^2c+abc^2) = p^2$

ie $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+\underbrace{2abc}_{-q}\underbrace{(a+b+c)}_{0} = p^2$

ie $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 = \boxed{p^2}$

d'où $P'(a)P'(b)P'(c) = 27(-q)^2 + 9pp^2 + 3p^2(-2p) + p^3$
$= 27q^2+4p^3$

3/2

P a une racine double $\Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ est racine double de } P \\ \text{ou} \\ b \text{ ———} \\ \text{ou} \\ c \text{ ———} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P'(a) = 0 \\ \text{ou} \\ P'(b) = 0 \\ \text{ou} \\ P'(c) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow P'(a)P'(b)P'(c) = 0$ par intégrité de $\mathbb{C}$

$\Leftrightarrow 4p^3+27q^2 = 0$